Benha University
Faculty of Science
Math. Dept.

Model Answer for

نموذج اجابه لمادة الهندسة التفاضليه

المستوى الرابع ــــ شعبة الرياضيات

نصف ورقة

تاريخ الامتحان: 2 - 1 -2019

دكتور/ صلاح جمعة الجندي

Total: 40 points

السؤال الأول

(أ) ليكن $\bar{x}(s)$ منحنى منتظم من النوع C^k و $k \geq 3$ فان: $\dot{\bar{n}}(s) = -k(s)\bar{t}(s) + \tau(s)\bar{b}(s)$

الاجابة **(5 درجة)**

حيث أن المجموعة $\{\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)\}$ **أساس متعامد للفراغ الاقليدي** R^3 **(نظرية) فان**

$$b)\quad \dot{\bar{n}}(s) = A\,\bar{t}(s) + B\bar{n}(s) + C\,\bar{b}(s); \qquad ---- \qquad (\mathrm{I})$$

$$\mathrm{A} := \dot{\bar{n}}(s)\cdot\bar{t}(s),\ \mathrm{B} := \dot{\bar{n}}(s)\cdot n(s),\quad \mathrm{C} := \dot{\bar{n}}(s)\cdot\bar{b}(s)$$

ولتعين تلك المعاملات نتبع الآتي:

$$\begin{aligned}
&\because\quad \bar{n}(s)\perp\bar{t}(s)\\
&\Rightarrow\ \bar{n}(s)\cdot\bar{t}(s) = 0\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\bar{n}(s)\cdot\bar{t}(s)\right] = \dot{\bar{n}}(s)\cdot\bar{t}(s) + \bar{n}(s)\cdot\dot{\bar{t}}(s) = 0\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{A} := \dot{\bar{n}}(s)\cdot\bar{t}(s) = -\bar{n}(s)\cdot\dot{\bar{t}}(s)\\
&\qquad\qquad = -\bar{n}(s)\cdot(k(s)\bar{n}(s))\\
&\qquad\qquad = -k(s) \qquad\qquad \#\#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\because\quad |\bar{n}(s)| = 1\\
&\Rightarrow\ \bar{n}(s)\cdot\bar{n}(s) = 0\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\bar{n}(s)\cdot\bar{n}(s)\right] = 2\left[\dot{\bar{n}}(s)\cdot n(s)\right] = 0\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B} := \dot{\bar{n}}(s)\cdot n(s) = 0 \qquad\qquad \#\#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\because\quad \bar{n}(s)\perp\bar{b}(s)\\
&\Rightarrow\ \bar{n}(s)\cdot\bar{b}(s) = 0\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\bar{n}(s)\cdot\bar{b}(s)\right] = \dot{\bar{n}}(s)\cdot\bar{b}(s) + \bar{n}(s)\cdot\dot{\bar{b}}(s) = 0\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{C} := \dot{\bar{n}}(s)\cdot\bar{t}(s) = -\bar{n}(s)\cdot\dot{\bar{b}}(s)) = \tau(s) \qquad\qquad \#\#
\end{aligned}$$

وبالتعويض بقيمة تلك المعاملات في المعادلة (I) نحصل علي

$$\dot{\bar{n}}(s) = -k(s)\,\bar{t}(s) + \tau(s)\,\bar{b}(s)$$

(ب) اذا كان $\bar{x}(t)$ منحنى منتظم على الفتره I_t فاثبت ان الدالة $s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right| dt$ داله إجازة تغير بارامتر.

(4 درجات)

المنحني $\bar{x}(t)$ منحني منتظم علي فترة $0 \in I_t$ أي أن:

1. $\bar{x}(t)$ **من النوع** C^1،
2. $\bar{x}'(t) \neq \bar{0}$ **لكل** $t \in I$.

وحيث أن $s(t) := \int_0^t \left|\frac{d\bar{x}(t)}{dt}\right| dt$ **فان**

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right| \qquad \text{------} \qquad (*)$$

من العلاقة (*) بالإضافة لخصائص المنحني المنتظم نحصل علي

1. $s(t)$ **من النوع** C^1،
2. $\frac{ds}{dt} \neq 0$ **لكل** $t \in I_t$.

(ج) اذا كان $\bar{x}(s)$ تمثيل طبيعى لمنحنى فاثبت ان $\left|\frac{d\bar{x}}{ds}\right|=1$.

(3 درجات)

من المعادله (*) فى الفقره السابقة وباستخدام قاعدة السلسله نجد ان

$$\left|\frac{d\bar{x}(s)}{ds}\right| = \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right|\frac{dt}{ds} = \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{d\bar{x}}\right| = 1$$

(د) أوجد ادوات فرينيه - سيريه ونصف قطر الانحناء عند اى نقطه للحلوزونى المنتظم

$$\bar{x}(t) = 2\cos t\, e_1 + 2\sin t\, e_2,$$

(8 درجات)

المعادلة الاتجاهية لدائرة نصف قطرها 2 هي

$$\bar{x}(t) = 2\cos t\, \bar{e}_1 + 2\sin t\, \bar{e}_2\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = -2\sin t\, \bar{e}_1 + 2\cos t\, \bar{e}_2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\bar{x}(t)}{dt}\right| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

وبالتالي نحصل علي:

- متجه الوحدة المماسي $\bar{t}(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$\bar{t}(s):=\frac{d\bar{x}}{ds}=\frac{\frac{d\bar{x}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right|}=-\sin t\,\bar{e}_1+\cos t\,\bar{e}_2$$

- متجه الانحناء $\bar{k}(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$\bar{k}(s):=\frac{d\bar{t}(s)}{ds}=\frac{\frac{d\bar{t}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right|}=\frac{1}{2}\left[-\cos t\,\bar{e}_1-\sin t\,\bar{e}\right]$$

- الانحناء $k(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$k:=\left|\bar{k}(s)\right|=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2}\right]=\frac{1}{2}$$

وبالتالي لا توجد نقط انعطاف لدائرة.

- متجه الوحدة العمودي الأساسي $\bar{n}(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$\bar{n}(s):=\frac{\bar{k}(s)}{k(s)}=-\cos t\,\bar{e}_1-\sin t\,\bar{e}_2$$

- متجه الوحدة ثنائي التعامد $\bar{b}(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$\bar{b}(s):=\bar{t}(s)\times\bar{n}(s)$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ -\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{bmatrix}=\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow\quad\frac{d\bar{b}(s)}{dt}=\bar{0}$$

- نصف قطر الانحناء $\rho(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$\rho(s):=\frac{1}{k(s)}=2$$

- الالتواء $\tau(s)$ للمنحني عند أي نقطة:

$$\tau(s):=-\dot{\bar{b}}(s)\cdot\bar{n}(s)=0$$

السؤال الثانى

اذا كان السطح S معطى ب $\bar{x} = (u+v)\ e_1 + (u-v)\ e_2 + uv\ e_3,$

1) **(5 درجات)**

أوجد الصيغة الاساسية الاولى للسطح.

$$I(du,dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

حيث E,F,G **تسمي معاملات الصيغة الاساسية الاولي coefficients وتعرف بـ**

$$E := (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u),\ F := (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v),\ G := (\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v)$$

$$\bar{x}_u = e_1 + e_2 + ve_3,\ \ \bar{x}_v = e_1 - e_2 + ue_3$$

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 2 + v^2, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = uv\ , \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 2 + u^2$$

$$I(du,dv) = \left(2+v^2\right)du^2 + 2uvdudv + \left(2+u^2\right)dv^2$$

2) **(5درجات)**

اذا كان $\emptyset = u - v$ و $\theta = u + v$ تحويل بارميترى فأوجد تمثيل السطح بدلالة θ و Ø.

$$\theta = u+v, \quad \varphi = u - v \Rightarrow u = \frac{1}{2}(\theta+\varphi)\ \ ,\ \ v = \frac{1}{2}(\theta - \varphi)$$

$$\therefore \quad \bar{x}(\theta,\varphi) = \theta e_1 + \varphi e_2 + \frac{1}{4}\left(\theta^2 - \varphi^2\right)e_3$$

3) (5 درجات)

أوجد الصيغة الاساسية الثانيه للسطح .

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

$$L = -\bar{x}_{uu} \cdot \overline{N}, \quad M = \bar{x}_{uv} \cdot \overline{N}, \quad N = \bar{x}_{vv} \cdot \overline{N}$$

$$\bar{x}_{uu} = 0, \quad \bar{x}_{uv} = e_3, \quad \bar{x}_{vv} = 0$$

$$\overline{N} := \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = \frac{(u+v)e_1 - (u-v)e_2 - 2e_3}{\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}}$$

$$\therefore L = 0, \quad M = \frac{-2}{\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}}, \quad N = 0$$

$$II = \frac{-4}{\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}} dudv,$$

4) **(5درجات)**

أحسب الاتحناء الجاوسى والانحناء الاساسى.

<u>الانحناء الجاوسى يعطى بالعلاقة</u>

$$k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{\left(2u^2 + 2v^2 + 4\right)^2}$$

<u>الانحناء الاساسى</u>

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{2uv}{(2u^2 + 2v^2 + 4)^{3/2}}$$

With best wishes

Dr. Salah Gomaa Elgendi