جامعة بنها – كلية العلوم - الفصل الدراسي الأول للعام 2019/2018

امتحان المستوى الرابع – شعبة رياضيات

المادة / موضوعات مختارة في الرياضيات (2) 427 ر **الزمن / ثلاث ساعات**

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوي) :

السؤال الأول

أ- استنتج المعادلة التفاضلية لمسار جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة 0

ب- كرة كتلتها $10\,lb$ تسير بسرعة $5\ ft/\sec$ 0 اصطدمت بكرة أخرى كتلتها $4\,lb$ وتتحرك بسرعة $2\ ft/\sec$ في نفس الاتجاه 0 فإذا كان معامل الارتداد يساوي $1/2$ 0 أوجد سرعة كل من الكرتين بعد التصادم وأوجد طاقة الحركة المفقودة 0

السؤال الثاني

أنبوبة ملساء على شكل سيكلويد رأسه إلى أسفل ومفتوحة عند النابين 0 قذف جسيم من أسفل نقطة على الجدار الداخلي للأنبوبة بسرعة $v_A = 4\sqrt{ag}$ 0 بإهمال مقاومة الهواء أثبت أن زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع هو $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$ 0

السؤال الثالث

يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها λu^3 لوحدة الكتل فإذا قذفت النقطة المادية بسرعة ابتدائية $\sqrt{\lambda}/a$ في اتجاه يصنع زاوية $\pi/4$ مع البعد الابتدائي a من مركز الجذب 0أوجد معادلة مسار هذا الجسيم 0

السؤال الرابع

أوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة رقيقة على شكل قطاع دائري منتظم نصف قطره a وزاوية رأسه α حول محور التماثل وحول المحور العمودي على محور التماثل في مستوى الصفيحة 0

السؤال الخامس

oA قضيب منتظم طوله $2a$ وكتلته m يمكن أن يدور في مستوى رأسي حول طرفه المثبت o 0 عندما كان القضيب في وضع اتزانه المستقر أعطي سرعة زاوية مقدارها $\sqrt{3g/a}$ 0 برهن أن الزمن الذي يأخذه حتى يدور زاوية θ يتعين من العلاقة

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{3g}}\log\left(\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

عين مقدار واتجاه رد الفعل عند المحور o عند $\theta = \pi/3$ 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة موضوعات مختارة في الرياضيات التطبيقية (2) 427 ر المستوى الرابع شعبة رياضيات - كلية العلوم العام الدراسي 2019/2018 الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الأربعاء الموافق 2019/1/23 ورقة إمتحانية كاملة

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :

أ- معادلات الحركة :

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-mf \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \qquad (2)$$

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-f \qquad (1')$$

$$r^2\dot{\theta}=h \qquad (2')$$

حيث h مقدار ثابت 0 لإيجاد معادلة المسار نحذف الزمن من المعادلتين $(1')$ ، $(2')$ ولعمل ذلك نستخدم المتغير الجديد $u=1/r$

$$r=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dr}{du}=-\frac{1}{u^2}$$

ومن المعادلة $(2')$ نجد أن $\dot{\theta}=hu^2$

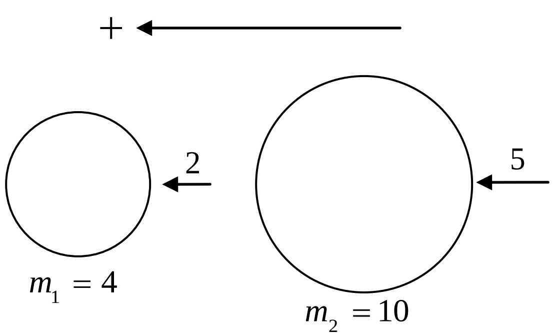
$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}=-r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \ddot{r}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-\frac{1}{h}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

وبالتعويض في المعادلة $(1')$ نجد أن

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad (3)$$

ب- نفرض أن سرعة كل من الكرتين بعد التصادم هما v_1,v_2 مقاسه في الاتجاه الموجب و هو اتجاه حركة الكرتين قبل التصادم 0 من قانون نيوتن نجد أن



$$v_2-v_1=-\frac{1}{2}(5-2) \qquad (1)$$

من قانون بقاء كمية الحركة نحصل على

$$10\times5+4\times2=10v_2+4v_1 \qquad (2)$$

من $(1),(2)$ نجد أن

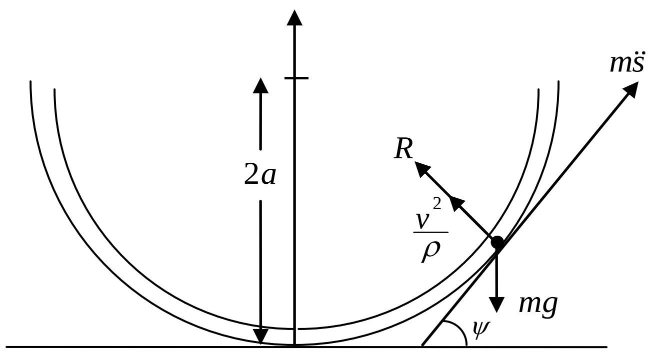
$$v_2=\frac{73}{14}\ ft/\sec \quad ، \quad v_1=\frac{26}{7}\ ft/\sec$$

طاقة الحركة المفقودة E تعطى من العلاقة

$$E=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_2-u_1)^2$$

$$\therefore E=\frac{10\times4}{2(10+4)}(1-\frac{1}{4})(5-2)^2=\frac{135}{14}\ lb.ft$$

إجابة السؤال الثاني



معادلات الحركة للجسيم هي

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع عبارة عن زمن الوصول من النقطة A إلى النقطة B ثم يتحرك كجسيم مقذوف رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية v_B وسرعة نهائية صفر عند c 0 من (1) نجد أن

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s$$

بتكـــامل هذه المعادلـــة مرتين وتعيين الثوابت من الشـروط الابتدائيـــة نحصل على علاقـــة بين الزمن وطـول القوس s بوضع $s = 4a$ نحصل على الزمن عند B

$$\therefore t_{A\to B} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{a/g}$$

ولتعيين السرعة عند B بتطبيق قانون ثبوت الطاقة عند الوضعين A, B

$$\therefore v_B^2 = v_A^2 - 2gy \quad ، \quad v_A = 4\sqrt{ag} \quad ، \quad y = 2a \qquad \Rightarrow \quad \therefore v_B^2 = 12ag$$

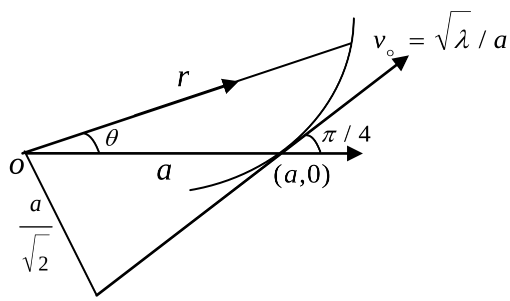
ولكن

$$v = v_\circ - gt \quad \Rightarrow \quad 0 = 2\sqrt{3ag} - gt_{B\to C} \quad \Rightarrow \quad t_{B\to c} = 2\sqrt{3}\sqrt{a/g}$$

$\therefore$ الزمن الكلي للوصول إلى أقصى ارتفاع

$$T = t_{A\to B} + t_{B\to C} = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$$

إجابة السؤال الثالث :



نوجد أولا قيمة الثابت h

$$h = v_\circ p_\circ = \frac{\sqrt{\lambda}}{a}a\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\lambda/2} \qquad (1)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u^3 \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u$$

بتكامل المعادلة السابقة بالنسبة إلى u نحصل على

$$h^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}u^2 + c$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad \therefore v^2 = \lambda u^2 + c_1$$

حيث c, c_1 ثوابت التكامل 0 عندما $v\sqrt{\lambda}/a, u = 1/a$ فإن $c_1 = 0$ 0

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2$$

بالتعويض عن قيمة h نجد أن

$$\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{\lambda}{2}u^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta}=\pm u$$

ولتعيين نوع الإشارة نجد أنه عند بداية الحركة تزداد r بزيادة θ أي تقل u بزيادة θ ولذلك نختار الإشارة السالبة

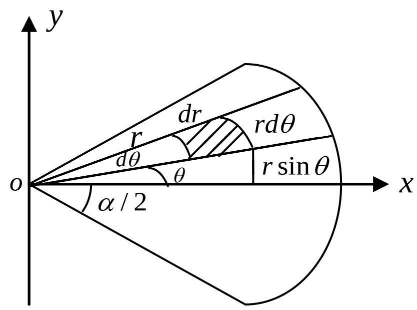
$$\therefore \frac{du}{d\theta}=-u \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-\int d\theta+c_2$$

عندما $r=a$ ، $\theta=0$ فإن $c_2=\ln(1/a)$

$$\therefore \ln\frac{a}{r}=-\theta \Rightarrow \therefore \ln\frac{r}{a}=\theta \Rightarrow \therefore r=ae^{\theta}$$

إجابة السؤال الرابع :

عنصر الكتلة $dm=rdrd\theta\cdot\rho$



$$I_x=\int_0^a\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}(rdrd\theta\cdot\rho)(r\sin\theta)^2$$

$$M=\int dm=\int_0^a\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}(rdrd\theta\cdot\rho)$$

بإجراء التكامل والتعويض عن قيمة ρ نجد أن

$$I_x=\frac{1}{4}Ma^2\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

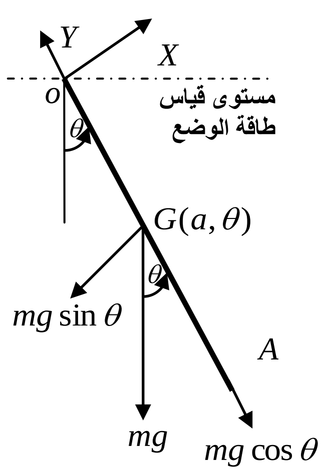
$$I_y=\int_0^a\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}(rdrd\theta\cdot\rho)(r\cos\theta)^2=\frac{1}{4}Ma^2\left(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

نلاحظ أن $I_\circ=I_x+I_y=\frac{1}{2}Ma^2$

في حالة قطاع نصف دائري أي أن $\sin\alpha=0 \Leftarrow \alpha=\pi$

$$\therefore I_x=I_y=\frac{1}{4}Ma^2$$

إجابة السؤال الخامس :



معادلة الحركة الدورانية هي مجموع عزوم القوى الخارجية حول o هي $I_\circ\ddot{\theta}=M$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}=-mg\sin\theta\cdot a$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{4a}\sin\theta \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات وبالتكامل نحصل على $\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}\cos\theta+c$

$$At \quad \theta=0 \quad , \quad \dot{\theta}=\sqrt{3g/a} \quad \Rightarrow \quad c=3g/2a$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(\cos\theta + 1) = \frac{3g}{a}\cos^2(\theta/2) \tag{2}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{a}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$t = \sqrt{\frac{a}{3g}}\int_0^\theta \sec\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2\sqrt{\frac{a}{3g}}\log\left(\sec\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

معادلة حركة مركز الثقل G في اتجاه r هي

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - Y$$

$$\therefore Y = mg\cos\theta + ma\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (3) نحصل على

$$\therefore Y = mg\cos\theta + \frac{3mg}{2}(\cos\theta + 1) \quad \Rightarrow \quad \therefore Y = \frac{1}{2}mg(3 + 5\cos\theta) \tag{4}$$

معادلة حركة مركز الثقل G في اتجاه θ هي

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = X - mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \therefore X = mg\sin\theta + ma\ddot{\theta} \tag{5}$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (5) نحصل على

$$\therefore X = mg\sin\theta - \frac{3m}{4}g\sin\theta = \frac{1}{4}mg\sin\theta \tag{6}$$

عندما $\theta = \pi/3$ فإن $X = \sqrt{3}mg/8$ ، $Y = 11mg/4$ إذن $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{487}mg/8$

رد الفعل يصنع زاوية مع Go مقدارها $0 \ \tan^{-1}(Y/X) = 4^\circ \quad 30'$