كلية العلـــــوم

المستوي الرابع

شعبة علوم الحاسب

الفصل الدراسي الأول

2019-2018

تاريخ الامتحان: 2018/12/27

<u>نموذج اجابة + صورة من الاسئلة</u>

<u>ورقة كاملة</u>

<u>المادة: ميكانيكا تحليلية</u>

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

صورة من الاسئلة

جامعة بنهـــــــــــا
كلية العلـــــــــــوم
قســم الرياضيـــــات

المـــادة: ميكانيكا تحليلية 232ر
الزمـــن: ساعتان
المستوي: الرابع
التاريخ: 2018/12/27 م

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة:

السؤال الأول:

أ) عرف كل من: إحداثيات العموم – سرعات العموم – كمية حركة العموم– القيود وأنواعها– قوي العموم.

ب) يتكون البندول المستوي المزدوج من كتلتان m_1, m_2 متصلتان ببعضها بقضيب خفيف طوله 5 وتتصل m_1 بقضيب آخر طوله 3 ويمكن للطرف الآخر لهذا القضيب الحركة بحرية حول نقطة ثابتة o بمفصل أملس وتتحرك المجموعة بحرية كاملة في مستوي رأسي. أوجد قوي العموم لهذه المنظومة؟

السؤال الثاني:

أ) تتحرك نقطه ماديه في الفراغ كتلتها m. إستخدم الاحداثيات الكرويه كاحداثيات عموم و من ثم استخدم معادلات لاجرانج لتعيين مركبات متجه العجله لنقطه ماديه.

(ب) استنتج معادلات هاملتون القانونية لمنظومة ميكانيكية لها عدد n من إحداثيات العموم q_s؟

السؤال الثالث:

اوجد داله هاملتون ومعادلات هاملتون لنقطه ماديه كتلتها m تتحرك في الفراغ في مجال قوه $\vec{F}$ داله جهدها $U(x,y,z)$.

السؤال الرابـــع:

أ) عرف قوس بواسون لأي دالتين f, g ثم أذكر ثلاثة خواص له وما هي متطابقة جاكوب؟

ب) إذا كانت كل من الكميتين $g(q,p,t), f(q,p,t)$ ثابت حركه أي أن $\frac{df}{dt}=0$, $\frac{dg}{dt}=0$ فإثبت أن قوس بواسون $\{f,g\}$ يكون أيضا ثابت حركه .

انتهت الأسئلـــة،
متمنياً للجميع التوفيـــق والنجـــاح،
د. أحمد مصطفي

نموذج الاجابة

إجابة السؤال الأول:

(أ)

* إحداثيات العموم: هي تلك الإحداثيات المستقلة واللازمة والكافية لتعيين موضع المجموعة تعييناً فريداً، وإذا كان عدد هذه الإحداثيات هو n فإننا نرمز لإحداثيات العموم بالرموز $q_1, q_1, \ldots, q_n$ وبصفة مركزة q_s حيث

$s = 1,2,..,n$

* سرعات العموم: تسمي $\dot{q}_s = \dfrac{\partial q_s}{\partial t}$ الكميات بسرعات العموم المنظرة لإحداثيات العموم q_s ويلاحظ أنه لا يشترط أن تكون وحدات سرعات العموم (طول\زمن).

* كمية حركة العموم: تعرف بأنها $p_s = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$، وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t .

* القيود وأنواعها: تنقسم القيود التي وضعها علي حركة مجموعة من النقط المادية إلي نوعين أساسيين،

1) القيد التفاضلي أو الكينماتيكي ، وفيه تكون المعادلات المعبرة عن القيود تحتوي علي إحداثيات جميع العناصر أو بعضها وكذلك تفاضلاتها بالنسبة للزمن علاوة علي ظهور الزمن t صراحة.

2) القيد الهندسي: وفيه لا تظهر السرعات $\dot{\vec{r}}_j$ في معادلات القيود وتكون تلك المعادلات علي الصورة

$$f(\vec{r}_j, t) = 0$$

* قوي العموم: تسمي الكميات $Q_s = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k . \dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}$ بقوي العموم المصاحبة لإحداثيات العموم q_s ، $\vec{r}_k$ هي متجهات الموضع لعناصر المنظومة والتي عدد عناصرها N ، $\vec{F}_k$ هي القوي المؤثرة علي عناصر المنظومة

(ب)

يمكن تعيين القوي الكارتيزية $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ أو قوي العموم Q_φ, Q_ψ من نفس دالة الجهد U والتي إذا قيست من المستوي الأفقي الذي يمر بالنقطة الثابتة O نجد أن طاقة الوضع للمجموعة هي:

$$\begin{aligned} U &= -m_1 g\, y_1 - m_2 g\, y_2 = -m_1 g(a\cos\varphi) - m_2 g\,(a\cos\varphi + b\cos\psi) \\ &= -(m_1 + m_2) g\, a\cos\varphi - m_2 g\, b\cos\psi \end{aligned}$$

ومن معادلات التعريف تنتج القوي المطلوبة

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 U = m_1 g\,\hat{j}, \qquad \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 U = m_2 g\,\hat{j}$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -(m_1+m_2)ga\sin\varphi, \qquad Q_\psi = -\frac{\partial U}{\partial \psi} = -m_2 gb\sin\psi$$

إجابة السؤال الثاني:

أ) يلاحظ أنه باستخدام الاحداثيات الكرويه (r,θ,ϕ) كاحداثيات عموم فان طاقه الحركه للنقط الماديه هي المعادله السابقه مباشره

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

ومن معادلات لاجرانج في صورتها الأولي يمكننا حساب قوي العموم Q_r, Q_θ, Q_ϕ المصاحبه للاحداثيات r,θ,ϕ علي الترتيب و نجد إذن

$$Q_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$= m\frac{d}{dt}\dot{r} - mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\dot{\phi}^2)$$

$$= m[\ddot{r} - r(\dot{\theta} + \sin^2\dot{\phi}^2)]$$

$$Q_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$= m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

$$= m\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right]$$

$$Q_\phi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi})$$

و ألان يكون الشغل الإفتراضي المبزول علي نقطه ماديه هو

$$\delta W = \sum_{s=1}^{3} Q_s\delta q_s$$

$$= Q_r \delta r + Q_\theta \delta\theta + Q_\phi \delta\phi$$

وحيث أن متجهات القوي $\vec{F}$ والعجله $\vec{a}$ و الازاحه الافتراضيه $\delta\vec{r}$ في الاحداثيات الكرويه كما يلي

$$\vec{F} = \hat{r}F_r + \hat{\theta}F_\theta + \hat{\phi}F_\phi$$

$$\vec{a} = \hat{r}a_r + \hat{\theta}a_\theta + \hat{\phi}a_\phi$$

$$\delta\vec{r} = \hat{r}\delta r + \hat{\theta}\cdot r\delta\theta + \hat{\phi}\ r\sin\theta\delta\phi$$

وبذلك فإن الشغل الافتراضي كما هو متوقع

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = m\vec{a}\cdot\delta\vec{r}\\ &= F_r\delta r + rF_\theta\delta\theta + r\sin\theta F_\phi\delta\phi\\ &= m\left[a_r\delta r + ra_\theta\delta\theta + r\sin\theta a_\phi\delta\phi\right]\end{aligned}$$

وبمقارنه معادلتي الشغل الافتراضي نجد مركبات متجه العجله كما يلي

$$a_r = \frac{Q_r}{m} \quad , \quad a_\theta = \frac{Q_\theta}{mr} \quad , \quad a_r = \frac{Q_r}{mr\sin\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta} + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)$$

$$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi})$$

ب) سوف نعرف كمية حركة العموم بأنها

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \qquad (1)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t أي أن

$$p_s = p_s(q_s, \dot{q}_s, t) \qquad (2)$$

والآن اعتبر دالة هاملتون H وتعرف بالعلاقة الآتية:

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - L \qquad (3)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t ، ولكن يمكن استخدام (2) لحذف $\dot{q}_s$ لتكون بدلالة p_s, q_s, t وبذلك تكون الدالة H معتمدة علي p_s, q_s, t أي أن

$$H = H(q_s, p_s, t) \qquad (4)$$

وإذا استخدمنا الرمز Δ للتعبير عن الزيادة في أية دالة في المتغيرات q_s, p_s, t أو المتغيرات $q_s, \dot{q}_s, t$ نتيجة للتغيرات المتناهية الصغر في تلك المتغيرات أي $\Delta q_s, \Delta p_s, \Delta \dot{q}_s, \Delta t$ وبهذا فإن التغير في الدالة H والناشئ من تغير البارامترات التي تعتمد عليها الدالة والمعرفة في المعادلة (3)، وحيث $L = L(q, \dot{q}, t)$ أن نجد إذن

$$\Delta H = \sum_s (p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s) - \sum_s \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \Delta \dot{q}_s\right) - \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t$$

وباستخدام تعريف كمية حركة العموم p_s في المعادلة (1) وكذلك من معادلات لاجرانج نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad \dot{p}_s = \frac{\partial L}{\partial q_s},$$

وبذلك فإن التغير الكلي في دالة هاملتون يأخذ الصورة التالية:

$$(5) \; \Delta H = \sum_s \dot{q}_s \Delta p_s - \sum_s \dot{p}_s \Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t$$

والآن من مجموعة المعادلات (2) وعددها n معادلة في مجموعة المجاهيل $\dot{q}_s$ والتي عددها n أيضاً فإنه يمكن الوصول علي مجموعة سرعات العموم كدوال في إحداثيات العموم q_s وكميات حركة العموم والزمن t أي أن

$$(6) \; \dot{q}_s = \dot{q}_s(q_s, p_s, t)$$

وبالتعويض في المعادلة (3) للتخلص من سرعات العموم $\dot{q}_s$ فإن دالة هاملتون تصبح في صورة المعادلة (4)، وبإيجاد التغير فيها نجد أن

$$(7) \; \Delta H = \sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \Delta q_s + \sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \Delta p_s + \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t$$

وحيث أن التغير في (7) يجب أن يطابق تماماً التغير في (5) وبما أن التغيرات $\Delta t, \; \Delta q_s, \; \Delta p_s$ هي تغيرات مستقلة عن بعضها البعض وبذلك تنتج المعادلات التالية

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad -\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (8)$$

ويتضح من هذه المعادلات أن دالة هاملتون H لا تعتمد صراحة علي الزمن إلا إذا اعتمدت دالة لاجرانج عليه، أي أنه إذا كان $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ فإنه أيضاً يكون $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ أما باقي المعادلات في (8) فتعطينا معادلات الحركة

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (9)$$

وتسمي هذه المعادلات بمعادلات هاملتون القانونية وهي مكونة من عدد 2n معادلة تفاضلية من الرتبة الأولي والتي يؤدي حلها إلي تعيين عدد 2n مجهول منها n إحداثي عموم q_s، n كمية حركة العموم p_s وهذه الكميات هي دوال في الزمن.

إجابة السؤال الثالث:

نختار الإحداثيات الكارتيزيه (x, y, z) كا إحداثيات عموم ، نعلم أن طاقه الحركه للنقطه الماديه هي

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

وتكون داله لاجرانج هي $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$

أما كميات حركه العموم p_1, p_2, p_3 و المناظره للاحداثيات x, y, z فهي

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad , \quad p_2 = m\dot{y} \quad , \quad p_3 = m\dot{z} \qquad (1)$$

ومن هذه الكميات يمكن حساب سرعات العموم $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ بدلاله احداثيات العموم حتي يمكن تحذف سرعات العموم من تعريف داله هاملتون كما يلي

$$\begin{aligned} H &= \sum_s p_s \dot{q}_s - L \\ &= p_1\dot{x} + p_2\dot{y} + p_3\dot{z} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) \\ &= \frac{1}{m}(p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2) - \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}(p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2) + U(x, y, z) \\ H &= \frac{1}{2m}(p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2) + U(x, y, z) \qquad (2) \end{aligned}$$

وحيث استخدمنا معادلات (1) لكي نحذف سرعات العموم إذ نجد

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad , \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_1 \quad , \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m} p_2 \quad , \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} p_3 \quad , \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

ويلاحظ أن مجموعه معادلات هاملتون القانونيه هي سته معادلات تفاضليه من الرتبه الأولي ونصف هذه المعادلات حصلنا عليها من قبل في تعريف كميه حركه العموم في معادله (2) . أما النصف الأخر فيعطينا معادلات نيوتن للحركه بعد استخدام النصف الأول مره أخري إذ نجد

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

ويلاحظ أيضا أنه حيث داله الجهد لا تعتمد علي السرعات $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ و أن معادلات التحويل $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_s)$ لا تعتمد صراحه علي الزمن t أي أن $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = 0$ فإن داله هاملتون تصبح الطاقه الكليه وكما سنري

$$H = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$$

$$H = \frac{1}{2m}({p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2) + U(x, y, z)$$

إجابة السؤال الرابـــع:

أ) يعرف قوس بواسون لأي دالتين f, g كما يلي $\{f, g\} = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_s} \frac{\partial g}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s} \frac{\partial g}{\partial q_s} \right)$ حيث n هي عدد إحداثيات العموم.

أما خواصه له $(1)\ \{f, f\} = 0 \qquad (2)\ \{f, c\} = 0 \qquad (3)\ \{f, g\} = -\{g, f\}$

أما متطابقة جاكوب فهي $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ بشرط أن الدوال f, g, h تبقي في ترتيب دوري واحد.

ب) ولكي نثبت أن قوس بواسون $\{f, g\}$ هو ثابت حركه اذا كانت f, g ثابتي حركه فإننا نحسب معدل تغيره بالنسبه للزمن

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\{\{f,g\},H\}+\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} \qquad (1)$$

وذلك حيث استخدمنا معادله الحركه وبالنسبه للكميه $\{f,g\}$ نفسها .

و الأن من خواص اقواس بواسون وبوضع داله هاملتون H بالاضافه للدالتين f,g في متطابقه جاكوبي وكذلك استخدام الخواص الأخري نجد أن

$$\{f,\{g,H\}\}+\{g,\{H,f\}\}+\{H,\{f,g\}\}=0$$

$$\{f,\{g,H\}\}+\{\{f,H\},g\}=\{\{f,g\},H\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

و بالتعويض في المعادله (1) نجد إذن

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\{f,\{g,H\}\}+\{\{f,H\},g\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}$$

$$=\left\{f,\{g,H\}+\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\left\{\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\left\{f,\frac{dg}{dt}\right\}+\left\{\frac{df}{dt},g\right\}$$

وحيث أن $\frac{df}{dt}=0=\frac{dg}{dt}$ فإن $\frac{d}{dt}\{f,g\}=0$ ويكون $\{f,g\}$ثابت حركه.

Dr. Ahmed Mostafa