جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

كلية العلوم

المستوى : الثانى
المادة : احتمالات (1) 242 ر
الزمن : ساعتان

امتحان الفصل الدراسي الثانى لعام 2018 / 2019 م

اجب عن الأسئلة التالية : [الدرجة الكلية ثمانون درجة]

السؤال الأول : [خمس وعشرون درجة]

(أ) اثبت ان $P(\ \overline{A}|B\ ) + P(\ A|B) = 1$ حيث ان $A\ ,\ B$ حادثتان معرفتان على فضاء العينة S

(ب) إذا كان $P(\ A\ ) = \frac{1}{3}\ ,\ P(\ B\ ) = \frac{1}{2}\ ,\ P(\ A \cup B\ ) = \frac{3}{4}$

اوجد الاحتمالات الشرطية الآتية : $P(\ A|B)\ ,\ P(\ A|\overline{B}\ )\ ,\ P(\ \overline{A}|B\ )$

السؤال الثاني : [خمس عشر درجة]

اوجد احتمال الحادثة $P[1 \le X \le 2]$ **اذا كان :**

(1) X **متغير عشوائى يتبع التوزيع الهندسى حيث** $P = \frac{1}{3}$

(2) X **متغير عشوائى يتبع توزيع ذى الحدين حيث** $P = 0.1\ ,\ n = 10$

(3) X **متغير عشوائى يتبع التوزيع المنتظم حيث** $b = \frac{3}{2}\ ,\ a = \frac{1}{2}$.

السؤال الثالث : [عشرون درجة]

(أ) اوجد التوقع الرياضي و التباين إذا كان X **متغير عشوائي يحقق :**

$E(\ X + 4\ ) = 10\ ,\ E[(X + 4)^2\ ] = 116$

(ب) إذا كان معلوما ان احتمال المعاناة من اثار جانبية بعد استخدام احد الامصال هو 0.005
تم تطعيم 1000 شخص بذلك المصل أوجد
(1) احتمال على الاكثر شخص واحد يعانى من الاثار الجانبية
(2) العدد المتوقع للأشخاص الذين يعانون من اثار جانبية .

السؤال الرابع : [عشرون درجة]

متغير عشوائي X له دالة الكثافة : $x \succ 0\ ,\ f(x) = 5\ e^{-5X}$

اوجد : (أ) التوقع الرياضي
(ب) دالة التوزيع التراكمية لذلك المتغير
(جـ) احتمال الحوادث $P[\ X \ge 12\ ]\ \ P[\ X = 4\ ]$.

انتهت الأسئلة
مع أطيب التمنيات بالتوفيق

الإجابة النموذجية

إجابة السؤال الأول : [خمس و عشرون درجة]

(أ)

$$P(\ \overline{A}|B\ ) + P(\ A|B) =$$
$$\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A\cap B)}{P(B)} =$$
$$\frac{P[(\overline{A}\cup A)\cap B]}{P(B)} =$$
$$\frac{P[\ S\cap B]}{P(B)} =$$
$$\frac{P(B)}{P(B)} =$$
$$= 1$$

(ب)

$$\therefore\ P[\ (A\cup B) = \frac{3}{4}\ ,\quad P(\ A\ ) = \frac{1}{3}\ ,\ P(\ B\ ) = \frac{1}{2}$$

$$P(A\ \cup\ B\ ) = P\ (\ A\ ) + P(\ B\ ) - P(A\cap B\ )$$
$$\therefore\quad \frac{3}{4} = (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}) - P[\ A\cap B\ ]$$
$$\therefore\ P[\ A\cap B] = \frac{1}{12}$$

$$P(\ \overline{A}|B\ ) = \frac{P[\ \overline{A}\cap B\ ]}{P[\ A\ ]} = \frac{P[\ B\ ] - P[\ A\cap B\ ]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$P(\ A|\overline{B}\ ) = \frac{P[\ A\cap \overline{B}\ ]}{P[\ \overline{B}\ ]} = \frac{P[\ A\ ] - P[\ A\cap B\ ]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(\ A|B\ ) = \frac{P[\ A\cap B\ ]}{P[\ B\ ]} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

إجابة السؤال الثاني : [خمس عشر درجة]

(1) التوزيع الهندسي يعرف كما يلى :

$$P(\ X = k\ ) = P\ \ q^{k-1}\qquad ,\ k = 1\ ,\ 2\ ,.....$$
$$\because\qquad P\ =\ \frac{1}{3}\ ,\ \therefore\qquad q = \frac{2}{3}$$

$$P(1 \le X \le 2) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3}\right]$$
$$= \frac{5}{9}$$

(2) بما أن X متغير عشوائي يتبع توزيع ذى الحدين الذى يعرف كا يلى : $\because P(X=k) = \binom{n}{k} P^k q^{n-k}$

$$P(1 \le X \le 2) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \binom{10}{1}(0.1)^1 (0.9)^9 + \binom{10}{2}(0.1)^2 (0.9)^8$$
$$= .....$$

(3) X يتبع التوزيع المنتظم الذى يعرف كما يلى : $f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le X \le b$

$$P[1 \le X \le 2] = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}\, dx$$
$$= x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

إجابة السؤال الثالث : [عشرون درجة]

(أ) بما ان X متغير عشوائى يحقق :

$$E(X+4) = 10 \quad , \quad E[(X+4)^2] = 116$$

$$E(X+4) = \int (X+4)\, f(x)\, dx$$
$$= \int X\, f(x)\, dx + 4\int f(x)\, dx$$
$$= E(X) + 4$$
$$= 10$$
$$\therefore E(X) = 6$$

التوقع الرياضى :

$$E[(X+4)^2] = \int (X^2 + 8X + 16)\, f(x)\, dx$$
$$= \int X^2 f(x)\, dx + 8\int X f(x)\, dx + 16\int f(x)\, dx$$
$$= E(X^2) + 8E(X) + 16$$
$$= 116$$

التباين :

$$E(X^2) = 116 - 8\,E(X) - 16$$
$$= 52$$
$$\therefore \quad V(X) = 52 - 6^2$$
$$= 16$$

(ب)

التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو توزيع بواسون $\quad n = 1000 \quad , \quad p = 0.005$

$$\because P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad \lambda = n\,p = 5$$

$$P(X \le 1) = P[X = 0] + P[X = 1]$$
$$= e^{-\lambda} + \frac{5^1}{1!} e^{-\lambda}$$
$$= 6\ e^{-5}$$
$$E(X) = \lambda$$
$$= 5$$

السؤال الرابع

المتغير X يتبع التوزيع الأسى

$$\because P(X = k) = \lambda\ e^{-\lambda x} \quad , \quad x \ge 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\therefore \quad = \frac{1}{5}$$
$$\therefore$$

$$\because P(X \ge 12) = \int_{12}^{\infty} 5\ e^{-5x}\ dx$$
$$= \frac{-5}{5} e^{-5x}\ ]_{12}^{\infty}$$
$$= -e^{-60}$$

$$\because P(X = 4) = \int_{4}^{4} 5\ e^{-5x}\ dx$$
$$= 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-5x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

تاريخ الاختبار / اليوم الاحد الموافق 19 / 5 / 2019
المستوى الثاني / شعبة رياضيات و حاسب
أستاذ المـادة / د السيد حامد على سيد احمد
ورقة امتحانيه كاملة و الزمن ساعتان