جامعة بينها . كلية العلوم　　　　بسم الله الرحمن الرحيم　　　　الفرقة الرابعة : شعب : رياضيات وحاسب آلي

قسم الرياضيات　　امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول لعام2013 /2014 م مادة مقرر خاص (الإحصاء الرياضي)　الزمن : ساعتان

إجابة أمتحان

الفرقة الرابعة علوم　　　　شعب الرياضيات و الحاسب　　　　المادة : نقرر خاص

يوم الأمتحان: الاربعاء 15 / 1 / 2014 م　　　　ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

أجب عن أربعة أسئلة فقط من الأسئلة الآتية:

1 . إذا كان (X,Y) متغير عشوائي في بعدين له دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x,y)=C(6-x-y) \qquad , \qquad 0<x<2 \qquad , \qquad 2<y<4 \ .$$

أوجد قيمة C، وأوجد التغاير بين X , Y ومن ثم اوجد معامل الأرتباط بينهما وكذلك أوجد $P[X>1,Y<3], P[X>1], P[X+Y<3]$. (20 درجة) .

اجابة السؤال الأول: إذا كان $C>0$ فإن $\mathbf{f(x,y)\geq 0}$.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_{2}^{4}\int_{0}^{2} C(6-x-y)dxdy=C\int_{2}^{4}(10-2y)dy=C(24-16)=8C$$

$$\therefore \qquad C=\frac{1}{8}$$

إذن باختيار الثابت $C=\frac{1}{8}$ فإن $f(x,y)$ تحقق شروط دالة كثافة مشتركة .

يمكن إيجاد دالة الكثافة الهامشية لكل منهما وهي

$$f(x)=\int_{2}^{4}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{1}{4}(3-x) \qquad ; \qquad 0\leq x\leq 2$$

$$g(y)=\int_{0}^{2}\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{4}(5-y) \qquad ; \qquad 2\leq y\leq 4$$

$$E[X]=\mu_X=\int xf(x)dx=\int_0^2 x\times\frac{1}{4}(3-x)dx=\frac{5}{6}$$

$$E[Y]=\mu_Y=\int yg(y)dy=\int_2^4 \frac{1}{4}y\times(5-y)dy=\frac{17}{6}$$

$$E[X^2]=\int x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2\times\frac{1}{4}(3-x)dx=1$$

$$E[Y^2]=\int y^2 g(y)dy=\int_2^4 \frac{1}{4}y^2\times(5-y)dy=\frac{25}{3}$$

$$Var[X]=\sigma_X^2=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$Var[Y]=\sigma_Y^2=\frac{25}{3}-\left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$E[XY]=\int\int xyf(x,y)dxdy=\int_2^4\int_0^2 xy\times\frac{1}{8}(6-x-y)dxdy=\frac{7}{3}$$

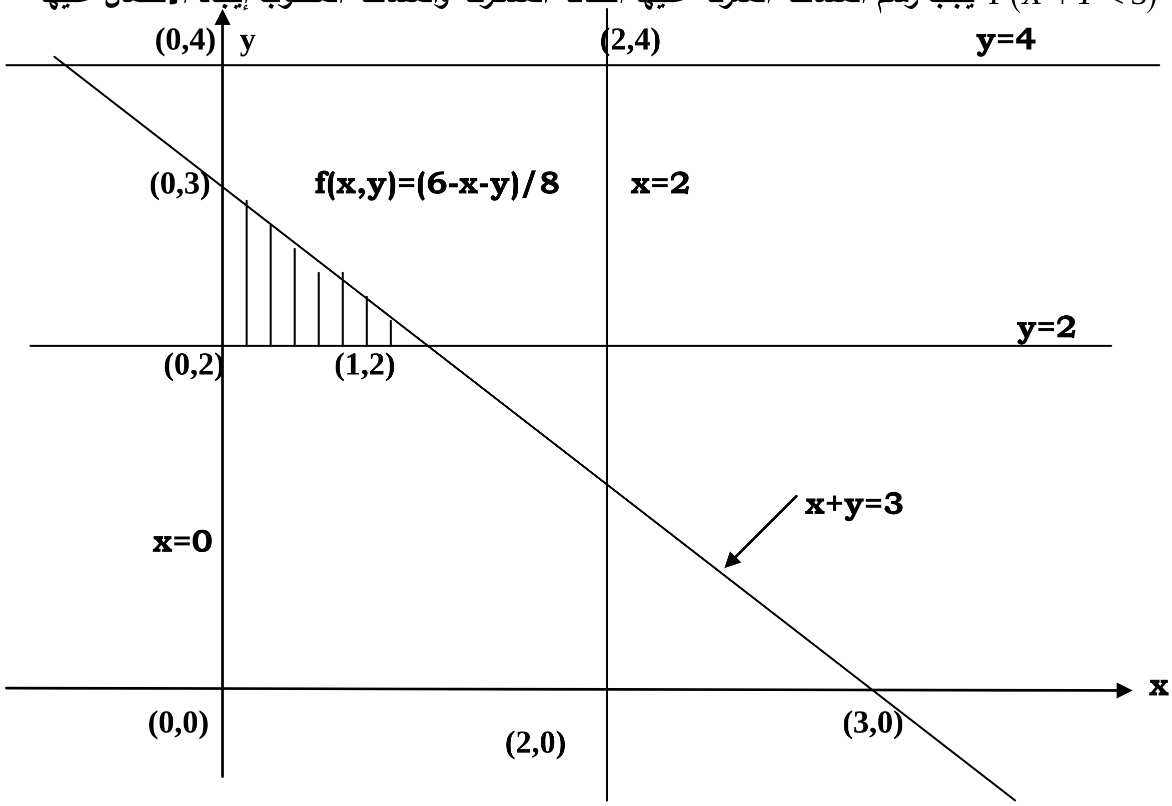
$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{7}{3}-\frac{5}{6}\times\frac{17}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$\rho[X,Y]=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}=-\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}\times\frac{11}{36}}}=-\frac{1}{11}$$

$$P(X>1;Y<3)=\int_1^2 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{1}{8}\int_1^2\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\frac{3}{8}$$

$$P(X>1)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{4}(3-x)dx=\frac{3}{8}$$

لإيجاد $P(X+Y<3)$ يجب رسم المساحة المعرفة عليها الكثافة المشتركة والمساحة المطلوب إيجاد الاحتمال عليها



$$P(X+Y<3)=\int_2^3\int_0^{3-y}\frac{1}{8}(6-x-y)dxdy=\frac{1}{8}\int_2^3\left(\frac{27}{2}-6y+\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{5}{24}$$

2 . أ . دالة الكثافة الاحتمالية للمتغر العشوائي X تعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{3}{8}x^2 \quad , \quad 0<x<2$

أوجد دالة الكثافة للمتغير العشوائي $Y=X^3$ ومن ثم اوجد توقع وتباين المتغير العشوائي Y . (10 درجة)

اجابة السؤال الثاني (أ) :

إذا كانت G(y) ترمز إلي دالة التوزيع التراكمية للمتغير Y عند النقطة y . فإن

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y\le y)\\ &= P(X^3\le y)\\ &= P\left(X\le y^{1/3}\right)\\ &= \int_0^{y^{\frac{1}{3}}}\frac{3}{8}x^2dx\\ &= \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{8}y \end{aligned}$$

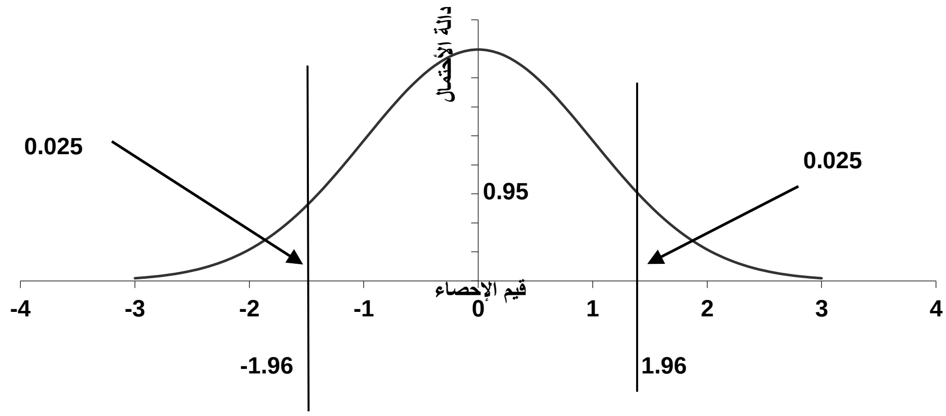
وبالتالي فإن $g(y)=\frac{1}{8}$ **لكل** $0<y<8$ **،** $\mathbf{g(y)=0}$ **بخلاف ذلك .**

ب . أختيرت عينة عشوائية من 16 من مجتمع تبع التوزيع الطبيعيى تباينة 4 . فإذا كان متوسط العينة $\bar{x}=23.5$ فأوجد حدود الثقة لمتوسط المجتمع عند درجة ثقة 95% . وإذا كان تباين المجتمع مجهول ووجد ان تباين العينة $s^2=5$ فأوجد حدود الثقة لمتوسط المجتمع عند درجة ثقة 99% . علما بأن $t_{(0.005,15)}=2.974$. (10 درجة)

اجابة السؤال الثاني (ب) :

<u>في حالة ما يكون التباين للمجتمع معلوم ويساوي 4</u>

عند درجة ثقة 95% اي ان $1-\alpha=0.95$ **نجد أن** $\alpha=0.05, \frac{\alpha}{2}=0.025$ **ومن الجداول نجد أن** $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ **وبالتالى فأن**



$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$23.5-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}<\mu<23.5+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$22.52<\mu<24.48$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هى $(22.52,24.48)$.

<u>في حالة ما يكون التباين للمجتمع مجهول وتباين العينة معلوم ويساوي 5</u>

عند درجة ثقة 99% اي ان $1-\alpha=0.99$ **نجد أن** $\alpha=0.05,\frac{\alpha}{2}=0.005$ **ومن الجداول نجد أن** $t_{(0.005,15)}=2.974$

$$\bar{x}-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$23.5-2.974\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}<\mu<23.5+2.974\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}$$

$$22.94<\mu<24.06$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 99% هى $(22.94,24.06)$.

3 . أ . أختيرت عينة عشوائية تحتوي علي 100 بيضة من إنتاج مزرعة من الدواجن فوجد أن متوسط وزن البيضة في العينة 70 جرام والانحراف المعياري 12 جرام . في ضوء هذة البيانات ب مستوي معنوية $\alpha=0.05$ هل يمكن الموافقة علي إدعاء المسئولين التي تقول ان متوسط وزن اليضة أقل من 72 جرام . (10 درجة)

<u>اجابة السؤال الثالث (أ) :</u>

البيانات المعطاة هي كما يلي :

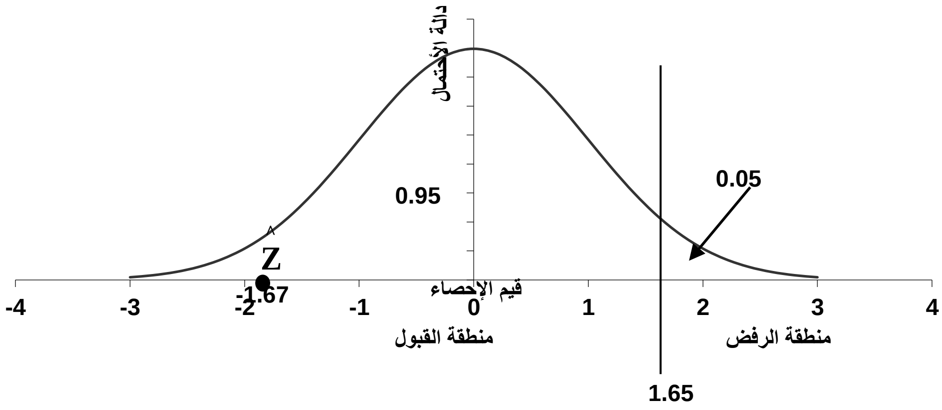
$$n=100 \quad , \quad \overline{X}=70 \quad , \quad \alpha=0.05 \quad , \quad s=12$$

1 . الفرض العد مي : $H_0:\mu=72$.

2 . الفرض البديل : $H_1:\mu>72$.

3. مستوي المعنوية $\alpha=0.05$ و الفرض البديل علي الصورة $H_1:\mu>72$ **و بالتالي فإن الاختبار ذو طرف واحد يمين .**

4 . باستخدام جداول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن منطقتي القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



5 . $\hat{Z}$ المحسوبة بافتراض صحة فرض العدم :

$$\hat{Z}=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{70-72}{12/\sqrt{100}}=-1.67$$

<u>القرار:</u>حيث أن $\hat{Z}$ تقع في منطقة القبول فأننا نقبل الفرض العد مي الذي ينص علي أن ان متوسط وزن اليضة أقل من 72 جرام .

ب . في عينة عشوائية لأحد محلات الهدايا وجد ان 84 من 250 من الرجال & 150 من 250 من النساء اشتروا نوع معين من الهدايا . كون 95% فترة ثقة للفرق بين نسب الرجال و النساء الحقيقية الذين يشتروا هذا النوع من الهدايا . (10 درجة)

<u>اجابة السؤال الثالث (ب) :</u>

عند درجة ثقة 95% تكون $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

نسبة النساء الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى المجتمع هو p_1

نسبة النساء الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى المجتمع هو p_2

نسبة النساء الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى العينة $r_1 = \frac{150}{250} = 0.6$

نسبة الرجال الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى العينة $r_2 = \frac{84}{250} = 0.336$

وبالتالى فأن فترة الثقة للفرق بين النسب هو

$$P\left[(r_1 - r_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1} + \frac{r_2(1-r_2)}{n_2}} \le (p_1 - p_2) \le (r_1 - r_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1} + \frac{r_2(1-r_2)}{n_2}}\right] = 1 - \alpha$$

أى أن

$$P\begin{bmatrix}(0.6-0.336) - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{250} + \frac{0.336(1-0.366)}{250}} \le (p_1 - p_2) \le \\ (0.6-0.336) - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{250} + \frac{0.336(1-0.366)}{250}}\end{bmatrix} = 0.95$$

$$P[0.264 - 0.083 \le (p_1 - p_2) \le 0.264 + 0.083] = 0.95$$

$$P[0.181 \le (p_1 - p_2) \le 0.347] = 0.95$$

أى أننا نثق بدرجة **95%** أن **$p_1 - p_2$** تقع بين **0.181 & 0.347** .

4 . أ . عرف كل من : الفرض الصفري . الفرض البديل . الأختبارات ذو ذيل واحد و ذو ذيلين . الأخطاء من النوع الأول و من النوع الثاني .

(10 درجة)

اجابة السؤال الرابع (أ) :

الفرض العد مي : Null Hypothesis

"وهو الفرض الأصلي الذي نجري حوله الاختبار أو فرض التساوي و يرمز له بالرمز H_0 " وهذا الفرض ينص علي أن قيمة المعلمة (معلمة المجتمع) = قيمة معينة (فرضية) أو بمعني آخر فإن هذا الفرض يفترض عدم وجود فرق حقيقي بين معلمة المجتمع و القيمة الافتراضية وأن أي فرق بينهما يكون راجعا إلى عوامل الصدفة .

الفرض البديل : Alternative Hypothesis

وهو الفرض المعاكس للفرض العد مي ويرمز له بالرمز H_1 وهو يعني أنة هناك فرقا معنويا بين معلمة المجتمع و التقدير الإحصائي التي تم حسابه من العينة أو بعبارة أخري يعني هذا الفرض أن العينة لا تمثل المجتمع بل أنها تنتمي إلى مجتمع آخر .

وهذا الفرض غالبا ما يكون علي الصورة $\ne$ or $>$ or $<$:

اختبار ذو طرف واحد يمين (ذو ذيل يمين)

إذا كان الفرض البديل H_1 علي صورة $>$ تكون هناك منطقة رفض واحدة إلى اليمين ومساحتها تساوي α

اختبار ذو طرف واحد يسار (ذو ذيل يسار)

إذا كان الفرض البديل H_1 علي صورة $<$ تكون هناك منطقة رفض واحدة إلى اليسار ومساحتها تساوي α

الاختبار اختبار ذو طرفين (ذو ذيلين).

إذا كان الفرض البديل H_1 علي صورة $\ne$ تكون منطقة الرفض مقسمة إلى منطقتين موزعة بالتساوي ومساحة كل منهما تساوي $\alpha/2$ وذلك علي طرفي التوزيع

1 . خطأ من النوع الأول : Type One Error

يحدث هذا الخطأ عندما يكون القرار الذي تم اتخاذه هو رفض الفرض العد مي علي الرغم من صحته . ويرمز لاحتمال الوقوع في خطأ من هذا النوع بالرمز α.

و يسمي هذا الاحتمال بمستوى المعنوية Significance Level كما يسمي الاحتمال المكمل $(1-\alpha)$ بدرجة الثقة Confidence Degree.

2 . خطأ من النوع الثاني : Type Two Error

يحدث هذا الخطأ عندما يكون القرار الذي تم اتخاذه هو قبول الفرض العد مي علي الرغم من خاطئ . ويرمز لاحتمال الوقوع في خطأ من هذا النوع بالرمز β.

ب . لقياس كمية النيكوتين الموجودة في نوعين من السجائر . تم أخذ عينة من النوع الأول حجمها 50 سجارة ووجد انها تحتوي في المتوسط علي 2.61 مليجرام بإنحراف معياري 0.12 مليجرام من النيكوتين ، بينما تم أخذ عينة من النوع الثاني حجمها 40 سجارة ووجد انها تحتوي في المتوسط علي 2.38 مليجرام بإنحراف معياري 0.14 مليجرام من النيكوتين . اختبر الفرض القائل ان $\mu_1 - \mu_2 = 0.2$ ضد الفرض البديل $\mu_1 - \mu_2 \neq 0.2$ بإستعمال مستوي معنوية $\alpha = 0.05$. (10 درجة)

اجابة السؤال الرابع (ب) :

الأنحراف المعياري للمجتمعين مجهولين σ_1, σ_2 غير معلومة .

من بيانات العينة $\bar{x}_1 = 2.61, s_1 = 0.12, \bar{x}_2 = 2.38, s_2 = 0.14$ ، $n_1 = 50, n_2 = 40, \alpha = 0.05$.

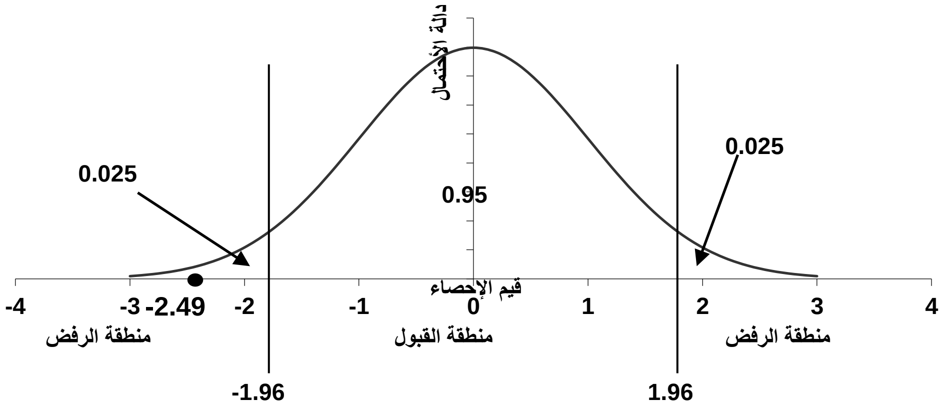
ولذلك باستخدام توزيع t في الاختبار نجد أن :

الفرض العدم : $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0.2$ الفرق بين متوسط كمية النيوكوتين في النوعين يساوي 0.2 .

الفرض البديل : $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.2$ الفرق بين متوسط كمية النيوكوتين في النوعين لا يساوي 0.2 .

الإحصائية المستخدمة $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ و التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي القياسي .

بمعلومية مستوي المعنوية و الفرض البديل H_1 فإن الاختبار ذو طرفين وتكون مناطق القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



الاختبار الإحصائي : بافتراض صحة الافتراض العدم فإن

$$\hat{Z} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0.2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{2.61 - 2.38 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.12}{50} + \frac{0.14}{40}}} = \frac{0.03}{0.08} = 0.375$$

القرار : حيث أن $\hat{Z}$ تقع في منطقة الرفض العدم فأننا نستطيع القول أن هناك فرق معنوي بين متوسط كمية النيوكوتين في النوعين يساوي 0.2.