اجابة مادة الرياضيات ثانية بيولوجي وجيولوجيا نظام قديم

أ- $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^4 + y\sin x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2.4y^3 - \cos x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 8xy^3 + \sin x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 8xy^3 + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

ب- الحـــل

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = 2x\cos t + 2y\cdot\frac{1}{t}$$

ج- في البداية نوجد النقط الحرجة لهذه الدالة وذلك بحل المعادلتين الآتيتين آنياً

$$z_x = 6x - 2y = 0$$

$$z_y = -2x + 2y - 8 = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن

$$4x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن

$$y = 6$$

أي أن للدالة المعطاة نقطة حرجة هى

$$(2,6)$$

لمعرفة نوعية هذه النقطة نستخدم المعادلتين (1),(2)

$$z_{xx} = 6, z_{xy} = -2, z_{yy} = 2$$

عند النقطة (2,6) نجد أن

$$z_{xx}z_{yy} - {z^2}_{xy} = 12 - 4 = 8 > 0, z_{xx=6>0}$$

أى أن للدالة نهاية صغرى عند النقطة(2,6) قيمتها

$$z_m = 3(2)^2 - 2(2)(6) + (6)^2 - 8(6) = -24$$

<u>اجابة السؤال الثانى</u>

<u>1-</u> الدالة الأسية e^x

لدينا أن

$$f(x) = e^x \quad , \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\therefore f(0) = 1 \quad , \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad , n = 1,2,3,\ldots$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد أن

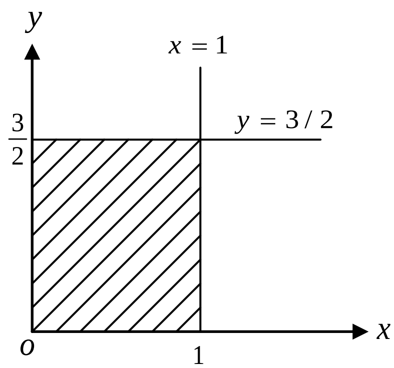
$$\therefore e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

هذه المتسلسلة تقاربيه لجميع قيم x وهذا يعني أن هذا المفكوك صحيح لجميع قيم x 0

ب- واضح أن منطقة التكامل في هذا

المثال هي منطقة مســـتوية تمثل

هندسياً مستطيل



$$\iint_R (4-x^2-y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{3/2}\int_0^1 \left[(4-x^2-y^2)dx\right]dy$$

$$= \int_0^{3/2}\left[4x-\frac{x^3}{3}-xy^2\right]_0^1 dy = \int_0^{3/2}\left[4-\frac{1}{3}-y^2\right]dy$$

$$= \int_0^{3/2}\left[\frac{11}{3}-y^2\right]dy = \left[\frac{11}{3}y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{3/2} = \frac{35}{8}$$

ج- نكتب المعادلة على الصورة

$$\frac{\mathrm{ydy}}{(\mathrm{y}+1)} = \frac{(1-x)dx}{x}$$

$$\frac{(y+1-1)dy}{(y+1)} = \frac{(1-\mathrm{x})\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\int dy - \int \frac{\mathrm{dy}}{(\mathrm{y}+1)} = \int \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} - \int \mathrm{dx}$$

$$y - \ln(y+1) = lnx - x + c$$

<u>اجابة السؤال الثالث</u>

أ- سوف نستخدم المفكوك (6) لإيجاد مفكوك بدلالة قوى$(x-1)$ ، $(y-2)$:-

$f(x,y) = e^{xy}$ $\qquad$ $f(1,2) = e^2$

$f_x(x,y) = ye^{xy}$ $\qquad$ $f_x(1,2) = 2e^2$

$f_y(1,2)=e^2 \qquad f_y(x,y)=xe^{xy}$

$f_{xx}(1,2)=4e^2 \qquad f_{xx}(x,y)=y^2e^{xy}$

$f_{xy}(1,2)=3e^2 \qquad f_{xy}(x,y)=xye^{xy}+e^{xy}$

$f_{yy}(1,2)=e^2 \qquad f_{yy}(x,y)=x^2e^{xy}$

000000000000000000000000000000000

000000000000000000000000000000000

$$\therefore\ f(x,y)=f(1,2)+(x-1)\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}+(y-2)\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2}+2(x-1)(y-2)\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x\partial y}\right.$$
$$\left.+(y-2)^2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2}\right]+\cdots$$

ب-العامل المكامل هو $\mu=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y=\frac{1}{1/x}\left\{\int\frac{1}{x}\cdot x\sin x\,dx+c\right\}$$
$$\therefore\ y=x\{-\cos x+c\}$$

ج - واضح من المعادلة أن $P=2x^3+3y, Q=(3x+y-1)$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

∴ المعادلة التفاضلية هي معادلة تامة . وبالتالي توجد دالة $f(x, y)$ بحيث يكون

$$df = (2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy$$

ومن تعريف df ينتج أن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x^3 + 3y), \frac{\partial f}{\partial y} = (3x + y - 1)$$

من العلاقة الأولى نجد أن

$$f = \int (2x^3 + 3y)dx = \frac{x^4}{2} + 3xy + \varphi(y)$$

ومن العلاقة الثانية نحصل على

$$f = 3xy + \frac{y^2}{2} - y + \psi(x)$$

بمقارنة الصورتين المختلفتين للدالة f نحصل على أن

$$f = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y = c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$f = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y = c$$

اجابة السؤال الرابع

أ- نضع المعادلة التفاضلية على الصورة

$$(D^2+2D+5)y=0$$

وتكون المعادلة المساعدة هي

$$m^2+2m+5=0 \Rightarrow \therefore m=-1+2i \quad or \ m=-1-2i$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$y=e^{-x}\left[A\cos 2x+B\sin 2x\right]$$

ب- نوجد أولاً الدالة المكملة y_1 وهي حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة

$$(D^2-3D+2)y=0$$

وتكون المعادلة المساعدة هي

$$m^2-3m+2=0 \Rightarrow \therefore (m-1)(m-2)=0$$
$$\therefore m=1 \quad , \quad m=2$$

$\therefore$ الدالة المكملة هي

$$y_1=A_1e^{x}+A_2e^{2x} \qquad (1)$$

بما أن المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-3D+2)y=x^2$$

إذن الحل الخاص ينتج من

$$y_2 = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} x^2 = \frac{1}{(D-1)(D-2)} x^2$$

$$= \left[\frac{-1}{D-1} + \frac{1}{D-2} \right] x^2 = \left[(1-D)^{-1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1} \right] x^2$$

$$= \left[(1 + D + D^3 + \cdots) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \cdots\right) \right] x^2$$

$$= x^2 + 2x + 2 - \frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$$

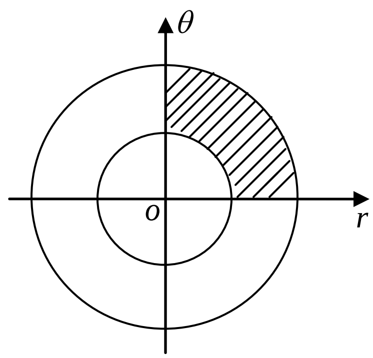
$$\therefore y_2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \qquad (2)$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y = y_1 + y_2 = A_1 e^{x} + A_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

ج- نرسم منطقة التكامل في الإحداثيات

القطبية حيث



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

هو التحويل القطبي المطلوب .

نجد أن المساحة المطلوبة محصورة

بين الدائرتين $r=1, r=3$ ومن الرسم نلاحظ أن المنطقة في الربع الأول تكون حدود التكامل هي

$$r:2\to 3 \quad , \quad \theta:0\to \pi/2$$

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 4\int_0^{\pi/2}\int_2^3 r\cdot r dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_2^3 r\cdot r dr = \frac{38}{3}\pi$$

جامعة بنها	**ثانية بيولوجى و جيولوجيا قديم**	**الفصل الثانى 2013/2012**
كلية العلوم	**رياضيات وحاسب**	**الأحد 2013/6/2**

أولا:*جزء الرياضيات*أجب عن الأسئلة التالية(الزمن الكلى ثلاث ساعات والزمن المخصص لهذا الجزء ساعتان) ودرجة هذا الجزء 80درجة.

السؤال الأول

أ- اذا كان $z = x^2 y^4 - y\cos x$ **أثبت أن** $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

ب- باستخدام قاعدة السلسلة أوجد $\frac{dz}{dt}$ ***اذاكانت*** $z = x^2 + y^2, x = \sin t, y = ln t$.

ج-أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.

السؤال الثانى

أ- أوجد مفكوك ماكلورين للدالة الأسية $y = e^x$.

ب- أحسب قيمة التكامل $\iint_R (4-x^2-y^2)dxdy$ حيث R هى المنطقة فى **المستوى** xy **المحدودة بالمستقيمات** $x=0, x=1, y=0, y=\frac{3}{2}$.

ج- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $xydy = (y+1)(1-x)dx$.

السؤال الثالث

أ-أوجد مفكوك الدالة e^{xy} حول النقطة $(1,2)$.

ب- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x \sin x$.

ج- أثبت أن المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد الحل العام لها

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$$.

بقية الأسئلة فى صفحة أخرى

السؤال الرابع

أ- حل المعادلة التفاضلية المتجانسة $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$.

ب-أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة بطريقة المؤثر

$(D^2 - 3D + 2)y = x^2$ (حيث $D = \frac{d}{dx}$)

ج- أحسب قيمة التكامل $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ حيث R هى المنطقة فى المستوى xy المحصورة بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9$.

مع أطيب تمنياتى بالنجاح

أ.د/محمود عبد العاطى