إجابة اختبار (تخلفات)مادة ديناميكا للفرقة الثانية (نظام قديم) كلية العلوم شعبة رياضيات العام الدراسي 2012/2013 الفصل الدراسى الثانى تاريخ الاختبار 2013/5/20(ورقه امتحانيه) ثلاث ساعات

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

السؤال الأول الجزء أ

$$\dot{x}-\omega y=\frac{4}{5}\omega y \qquad (1)$$

$$\dot{y}+\omega x=\frac{4}{5}\omega x \qquad (2)$$

من المعادلتين (1),(2) ينتج أن

$$\dot{x}=\frac{9}{5}\omega y \qquad (3)$$

$$\dot{y}=-\frac{1}{5}\omega x \qquad (4)$$

بتفاضل المعادلة (3) وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل علي

$$\ddot{x}=\frac{9}{5}\omega\dot{y}=-\frac{9}{25}\omega^2 x \qquad (5)$$

المعادلة (5) تمثل معادلة حركة توافقية زمنها الدوري $2\pi/\frac{3}{5}\omega$ أي أن الزمن الدوري يساوي $10\pi/3\omega$ وبالمثل بتفاضل المعادلة (4) والتعويض في المعادلة (3) ينتج أن

$$\ddot{y}=-\frac{9}{25}\omega^2 y \qquad (6)$$

والمعادلة (6) تمثل أيضا معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $10\pi/3\omega$ 0

∴ المسار قطع ناقص له نفس الزمن الدوري $10\pi/3\omega$ ويمكن إيجاد معادلة المسار مباشرة من المعادلتين (3),(4) بحذف الزمن بينهما

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=-9\frac{y}{x}=\frac{dx}{dy} \quad\Rightarrow\quad x^2+9y^2=c \quad\Rightarrow\quad \therefore \frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c/9}=1$$

وهذه تمثل معادلة قطع ناقص 0

ب- $\dot{r}=\lambda r \qquad (1) \qquad ، \qquad r\dot{\theta}=\mu\theta \qquad (2)$

من المعادلتين (1),(2) وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\therefore -\frac{1}{\lambda r}=\frac{1}{\mu}\ln\theta+c \Rightarrow \therefore r=-\frac{\lambda}{\mu}\ln\theta+c_1 \qquad (3)$$

حيث c,c_1 ثوابت التكامل 0والمعادلة(3) هي معادلة المسار 0 ولحساب مركبات العجلة نتبع الآتي

$$\ddot{r}=\lambda\dot{r}=\lambda^2 r \quad , \quad \dot{\theta}=\mu\theta/r \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta}=\mu\frac{r\dot{\theta}-\dot{r}\theta}{r^2}=\mu\frac{\mu\theta-\lambda r\theta}{r^2}$$

∴ مركبة العجلة النصف قطرية هي

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\lambda^2 r-r\mu^2\frac{\theta^2}{r^2}=\frac{\lambda^2 r^2-\mu^2\theta^2}{r}$$

والمركبة المستعرضة للعجلة هي

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=2\lambda r\frac{\mu\theta}{r}+\mu r\frac{\mu\theta-\lambda r\theta}{r^2}=\frac{\mu\theta(\lambda r+\mu)}{r}$$

إجابة السؤال الثاني :

أ- لإيجاد هذه المعادلة نحذف الزمن من المعادلتين $(1')$ ، $(2')$ ولعمل ذلك نستخدم المتغير الجديد $u=1/r$

$$r=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dr}{du}=-\frac{1}{u^2}$$

ومن المعادلة $(2')$ نجد أن $\dot{\theta}=hu^2$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}=-r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \ddot{r}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-\frac{1}{h}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

وبالتعويض في المعادلة $(1')$ نجد أن

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad (3)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار لنقطة تتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة 0

ب-

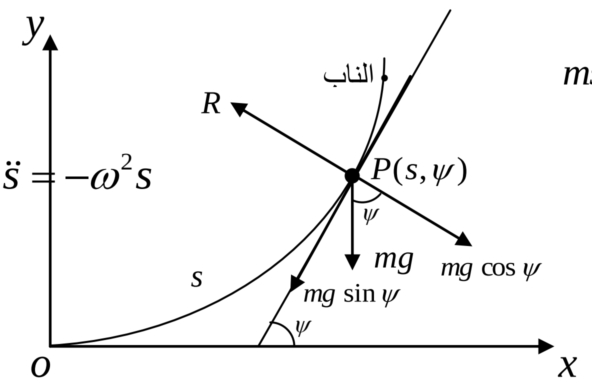
$$r=a\cos\theta \Rightarrow u=\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\sec\theta \quad , \quad \frac{du}{d\theta}=\frac{1}{a}\sec\theta\tan\theta \quad , \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{a}\left[\sec^3\theta+\sec\theta\cdot\tan^2\theta\right]$$

ولكن $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta \Rightarrow \therefore \tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{a}\left[\sec^3\theta+\sec\theta(\sec^2\theta-1)\right]=\frac{2}{a}\sec^3\theta-\frac{1}{a}\sec\theta$$

$$f=h^2\cdot\frac{2}{a}\sec^3\theta\cdot\frac{1}{a^2}\sec^2\theta=\frac{2h^2}{a^3}\sec^5\theta$$

إجابة السؤال الثالث :



معادلة الحركة في اتجاه المماس هي

$$m\ddot{s}=-mg\sin\psi$$

بالتعويض عن قيمة s في المعادلة السابقة نجد أن

$$\ddot{s}=-\omega^2 s$$

حيث $\omega=\sqrt{g/4a}$ والمعادلة السابقة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة حلها على الصورة

$$s=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$
$$\dot{s}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$$

من الشروط الابتدائية $t=0, s=4a, \dot{s}=0$ نجد أن

$$A=4a \quad ، \quad B=0$$

أي أن

$$s=4a\cos\omega t \Rightarrow 4a\sin\psi=4a\cos\omega t$$

$$\therefore \sin\psi = \cos\omega t \;\Rightarrow \omega\, t = \frac{\pi}{2} - \psi$$

$$\therefore \dot{\psi} = -\omega = const.$$

أي أن السرعة الزاوية لمماس المنحنى ثابتة أثناء الحركة 0 لإيجـــاد رد الفعل العمودي من معادلـــة الحركـــة في الاتجــاه العمودي على المماس

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi$$

$$\because s = 4a\sin\psi \Rightarrow \rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$$

$$\because s = 4a\cos\omega t \Rightarrow \dot{s} = -4a\omega\sin\omega\, t$$

$$\because \omega\, t = \frac{\pi}{2} - \psi$$

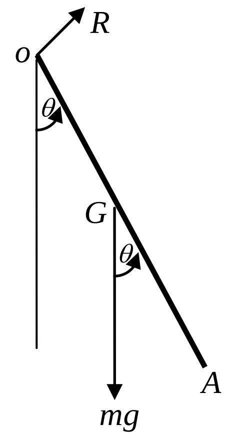
$$\therefore\ \dot{s} = -4a\omega\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -4a\omega\cos\psi = -\sqrt{4ag}\,\cos\psi$$

$$\therefore R = \frac{4mag\cos^2\psi}{4a\cos\psi} + mg\cos\psi = 2mg\cdot\frac{\rho}{4a} = \left(\frac{mg}{2a}\right)\rho$$

$$\therefore R \propto \rho$$

و هو المطلوب أثباته 0

السؤال الرابع :



أ- نفرض ان الساق oA طوله $2a$ وأنه يصنع زاوية θ مع الرأسي إلى أسفل في اللحظة t
$\therefore$ معادلة الحركة هي

$$I\ddot{\theta} = M$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\cdot a$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\cos\theta + c_1$$

$$At\quad \theta = 0 \quad , \quad \dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad c_1 = \omega^2 - (3g/2a)$$

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 + \frac{3g}{2a}(\cos\theta - 1) \qquad (1)$$

ولكـي يعمـل السـاق دورات كاملـة فـإن $\dot{\theta}$ يجـب أن تكـون اكبـر مـن الصـفر عنـدما $\theta = \pi$ أي يجـب أن تكـون $\omega > \sqrt{3g/a}$ 0 ولكي يصل الساق إلى حالة سكون لحظي عندما يأخذ الوضع الرأسي إلى اعلى

$$\dot{\theta} = 0 \quad at \quad \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3g/a}$$

و هو الشرط اللازم لسكون الساق لحظي وتصبح المعادلة (1)

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{a} + \frac{3g}{2a}\cos\theta - \frac{3g}{2a} = \frac{3g}{a}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بفصل المتغيرات و التكامل ينتج أن

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{3g}}\,\ln\left(\sec\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

ب- نفرض أن ρ هي كتلة وحدة مساحة القرص 0 وأن a هو نصف القطر 0 من التعريف

$$I_{\circ}=\int_{0}^{a}(2\pi r dr\rho)(r^2)=\frac{1}{2}Ma^2$$

حيث $M=\pi a^2\rho$ ولكن $I_{\circ}=I_x+I_y$ وبما أن x,y هما محوري تماثل $\Leftarrow$ $I_x=I_y$

$$\therefore I_x=I_y=\frac{1}{4}Ma^2$$

إجابة السؤال الخامس

$$\frac{dm}{dt}=\lambda mv$$

$$\because F=\frac{d}{dt}(m\,v)-u\frac{dm}{dt}$$

$\because$ السحابة ساكنة $\Leftarrow$ $\therefore u=0$

$$\therefore F=\frac{d}{dt}(m\,v)\ \Rightarrow\ mg=m\frac{dv}{dt}+\lambda mv^2$$

$$\therefore\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=g-\lambda v^2$$

$$\therefore -\frac{1}{2\lambda}\log\left(g-\lambda v^2\right)=x+c$$

عندما $x=0,v=0$ نجد أن $c=-\frac{1}{2\lambda}\log(g)$

$$\therefore x=\frac{1}{2\lambda}\log\frac{g}{g-\lambda v^2}$$

$$\therefore \lambda v^2=g\left(1-e^{-2\lambda x}\right) \qquad (1)$$

و هو المطلوب أولاً 0من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore v=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sqrt{1-e^{-2\lambda x}}$$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2\lambda x}}}=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\int dt+c=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}t+c \qquad (2)$$

باستخدام التعويض $y=e^{-\lambda x}$ ومنها نجد أن

$$\therefore\frac{1}{\lambda}\sec h^{-1}y=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}t+c$$

عندما $t=-0,x=0$ $\Leftarrow$ $y=e^{-\lambda x}=e^{0}=1$ إذن $c=0$

$$\therefore\frac{1}{\lambda}\sec h^{-1}y=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}t$$

بالتعويض عن $y=e^{-\lambda x}$ نحصل على

$$\therefore x=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\sec h\sqrt{\lambda g}t\right)$$