جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: المستوى الثانى

يوم الامتحان: الثلاثاء ١٢ / ١ / ٢٠١٦م

المادة : معادلات تفاضلية لغير طلاب الرياضيات

(كود ٢١٤ر)– ترم تخرج

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

الامتحان+ نموذج إجابته

جامعة بنها
كلية االعلوم
قسم الرياضيات

الـزمـن: ساعتان
التـــرم: الأول
التـاريخ: ٢٠١٦/١/١٢

معادلات تفاضلية لغير طلاب الرياضيات (كود ٢١٤ر) للمستوى الثانى

اجب عن الأسئلة الآتية:-

السؤال الأول :- 20 درجة

أ- حدد رتبة المعادلة التفاضلية التى حلها:

$$y(x) = A + Bx + x^2$$

حيث ان A ، B ثوابت.

ب- حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y + 1}.$$

السؤال الثانى :- 20 درجة

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

(i) $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0.$ (ii) $y = xy' + \frac{1}{2y'}.$

السؤال الثالث :- 20 درجة

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y'' + y' - 2y = 3e^x + 10 \sin x.$$

السؤال الرابع :- 20 درجة

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

(i) $y' + xy \ln y = 2xy.$ (ii) $xy'' - y' = x^2 e^x.$

مـع أطـيب التمنيـات بالنجـاح،،،

معادلات تفاضلية لغير طلاب الرياضيات (كود ٢١٤ر) للمستوى الثانى

السؤال الأول :-

أ- رتبة المعادلة التفاضلية ⟵ الثانية

ب-

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y+1}$$

الصورة ثنائى الخطية ونبحث عن نقطة تقاطع الخطين المستقيمين واللذين لهما المعادلتين

$$x+y-3=0, \quad x-y+1=0$$

بالجمع نجد $2x-2=0$ أى أن $\alpha = 1$ واذن $\beta = 2$

نستخدم الآن التعويض

$$x = X+1, \quad y = Y+2 \qquad \text{ويكون} \qquad y' = \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+1+Y+2-3}{X+1-Y-2+1} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

ثم نستخدم أيضا التعويض $Y = Xv$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v-v+v^2}{1-v} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{1-v}{1+v^2}dv = \frac{dX}{X}$$

$$\tan^{-1}v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln X + C$$

$$\tan^{-1}\frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\ln(X^2+Y^2) + C$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y-2}{x-1}\right) = \ln\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} + C$$

معادلات تفاضلية لغير طلاب الرياضيات (كود ٢١٤ر) للمستوى الثانى

السؤال الثاني :-

(i) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

معادلة خطية متجانسة من نوع كوشى وأويلر. نضع $y = x^m$ لنصل للمعادلة المساعدة

$$m(m-1) + 3m + 5 = m^2 + 2m + 5 = 0$$

$$(m+1)^2 + 4 = (m+1-2i)(m+1+2i) = 0$$

$$m_1 = -1 + 2i \ , m_2 = -1 - 2i \ , \alpha = -1 \ , \beta = 2$$

$$y_1 = x^{-1}\cos(2\ln x) \quad , \quad y_2 = x^{-1}\sin(2\ln x)$$

$$y = x^{-1}[C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x)]$$

$$\text{(ii) } y = xy' + \frac{1}{2y'}$$

معادلة كليريو والحل العام هو

$$y = Cx + \frac{1}{2C}$$

وحتى نتمكن من الحصول على الحل الشاذ فإننا نشتق الحل العام بالنسبة للثابت الاختيارى C ، إذ نجد

$$0 = x - \frac{1}{2C^2} \Rightarrow C^2x = \frac{1}{2},$$

$$y = (C^2x + \frac{1}{2})\frac{1}{C} = \frac{1}{C} \Rightarrow Cy = 1$$

$$y = \frac{1}{y}x + \frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{1}{2}y = \frac{1}{y}x$$

$$\therefore \ y^2 = 2x$$

معادلات تفاضلية لغير طلاب الرياضيات (كود ٢١٤ر) للمستوى الثانى

السؤال الثالث :-

$$y'' + y' - 2y = 3e^x + 10\sin x$$

المعادله خطيه غير متجانسه بمعاملات ثابته والمعادله المساعده تكون

$$m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1) = 0$$

$$m_1 = 1, m_2 = -2 \quad y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x},$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

ونضع الحل الخاص فى صورة توازى دالة الحد المطلق بمعاملات غير معينة

$$y_p = a\,x e^x + A\sin x + B\cos x$$

$$y_p' = a(x+1)e^x + A\cos x - B\sin x$$

$$y_p'' = a(x+2)e^x - A\sin x - B\cos x$$

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p' - 2y_p &= a(x+2+x+1-2x)e^x \\ &\quad + (-A-B-2A)\sin x \\ &\quad + (-B+A-2B)\cos x \\ &= 3e^x + 10\sin x \end{aligned}$$

$$3a = 3, -3A - B = 10, A - 3B = 0$$

$$a = 1, A = 3B, -10B = 10, B = -1, A = -3$$

$$y_p = x e^x - 3\sin x - \cos x$$

$$y = x e^x - 3\sin x - \cos x + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

معادلات تفاضلية لغير طلاب الرياضيات (كود ٢١٤ر) للمستوى الثانى

السؤال الرابع :-

(i) $y' + xy\ln y = 2xy$

نستخدم هنا التعويض $u = \ln y$ اذن $u' = \frac{y'}{y}$ وبعد القسمة على y نجد

$$u' + xu = 2x$$

$$P = x,\ \int P\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = e^{x^2/2}$$

$$Q = 2x,\ \int \rho Q\,dx = \int e^{x^2/2}\,2x\,dx = 2e^{x^2/2}$$

$$e^{x^2/2}u = 2e^{x^2/2} + C, \qquad \ln y = 2 + Ce^{-x^2/2}$$

(ii) $xy'' - y' = x^2e^x$

المعادلة لا تحتوى على y ونضع $y' = p$، $y'' = \frac{dp}{dx}$ ونقسم على x

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = xe^x$$

معادله تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فى p بالنسبة للمتغير x

$$P = -\frac{1}{x} \quad , \int P dx = -\ln x \quad , \qquad \rho = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$Q = xe^x \quad , \int PQdx = \int e^x\,dx = e^x$$

$$\frac{1}{x}p = e^x + 2C_1 \quad , \quad p = xe^x + C_1\ 2x = \frac{dy}{dx}$$

$$y = \int x\,e^x dx + C_1 \int 2x\,dx + C_2$$

$$y = (x-1)e^x + C_1x^2 + C_2$$