جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيات

المستوى: الأول

يوم الامتحان: الاثنين 28 / 12 / 2015 م

المادة : رياضيات عامه (2) (105 ر)

الممتحن: د . / عصام محسن عبدالحميد عواد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

ورقة كامله

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات عامة (2) (105 ر) لطلاب المستوى الأول

(الدرجة الكلية 80 درجة)

السؤال الأول

أ-اوجد قيمة التكاملات التالية **(20 درجة)**

$$1-\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx, \qquad 2-\int \tan^{-1}\theta\, d\theta,$$

$$3-\int \sin 5x\ \cos 3x\, dx, \qquad 4-\int \cos^5 x\ dx\ .$$

الحـــــــــــــل

1- باستخدام التعويض

$$u^2=e^x+1 \Rightarrow \therefore 2u\,du=e^x dx\,,\; e^x=u^2-1$$

$$\therefore \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=2\int \frac{u(u^2-1)}{u}du=2\left[\frac{u^3}{3}-u\right]+c$$

$$=\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}-2(e^x+1)^{1/2}+c$$

2- نستخدم التكامل بالتجزئ

$$u=\tan^{-1}\theta \qquad dv=d\theta$$

$$du=\frac{1}{1+\theta^2}\,d\theta \qquad v=\theta$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2}\theta\ \tan^{-1}\theta-\frac{1}{2}\int \frac{\theta}{1+\theta^2}\ d\theta=\frac{1}{2}\theta\ \tan^{-1}\theta-\frac{1}{4}\ln(1+\theta^2)+\ c$$

-3

$$\int \sin 5x\ \cos 3x\, dx=\frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 8x)dx=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+c\,,$$

-4

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 d\sin x = \int (1-\sin^2 x)^2 d\sin x$$

$$= \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x) d\sin x$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

السؤال الثانى

أ- أحسب قيمة ثلاثه فقط من التكاملات التالية (15 درجة)

$$1 - \int e^x \cos e^x\,dx, \qquad 2 - \int \sec x\,dx,$$

$$3 - \int \frac{x + \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad 4 - \int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$$

الحــــــــــــــل

-1

$$\int e^x \cos e^x\,dx = \sin e^x + c$$

-2

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \ln(\sec x + \tan x) + c$$

3- $$\int \frac{x+\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int \sin^{-1} x\, d\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2 - \sqrt{1-x^2} + c$$

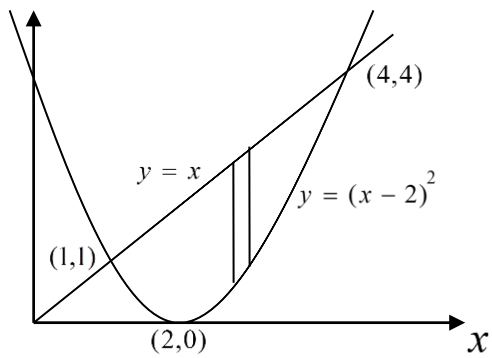
$$4- \quad (4-x^2)^{3/2} = (4-4\sin^2 u)^{3/2} = (4\cos^2 u)^{3/2} = 8\cos^3 u$$

$$\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} = \int \frac{2\cos u\, du}{8\cos^3 u} = \frac{1}{4}\int \sec^2 u\, du$$

ب- أحسب المساحة المحصورة بين القطع المكافىء $y = (x-2)^2$ والمستقيم $y = x$. (8 درجات)

الحـــــــــــــل

بحل معادلتي القطع والمستقيم معاً نجد أن نقطتي تقاطعهما هما $(1,1),(4,4)$ ونلاحظ أن رأس القطع هي النقطة $(2,0)$ ومحوره يوازي محور الصادات وفتحته إلى أعلى .



من قانون المساحة المحصورة بين منحنيين نجد أن قيمة المساحة A المطلوبة تساوي

$$A = \int_a^b [y_1 - y_2]dx = \int_1^4 \left[x-(x-2)^2\right]dx = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_1^4$$

$$= \frac{16}{2} - \frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{9}{2}$$

السؤال الثالث

1- أحسب قيمة التكاملات التالية (6 درجات)

$$b - \int_0^5 e^x \, dx \qquad\qquad a - \int_{-5}^{5} \frac{x \ \sec x}{1+x^2}\, dx,$$

الحـــــــــــــل

(a) التكامل يساوى صفر لان دالة التكامل داله فرديه .

$$b-\int_0^5 e^x\,dx = e^5-1$$

-2 اوجد مركز و نصف قطر الدائره **(7 درجات)**

$$\mathbf{3x^2+3y^2+6x-9y+1=0}$$

الحـــــــــــــل

بقسمة المعادلة على 3 نحصل على

$$x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0$$

$$\therefore f=1 \quad , \quad g=-3/2 \quad , \quad c=1/3$$

$\therefore$ مركز الدائرة هو $(-1,3/2)$ ونصف قطر الدائرة هو

$$r=\sqrt{f^2+g^2-c}=\sqrt{(-1)^2+(3/2)^2-(1/3)}=\sqrt{35/12}$$

3 - أوجد احداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى ومعادلة المحور والدليل للقطع

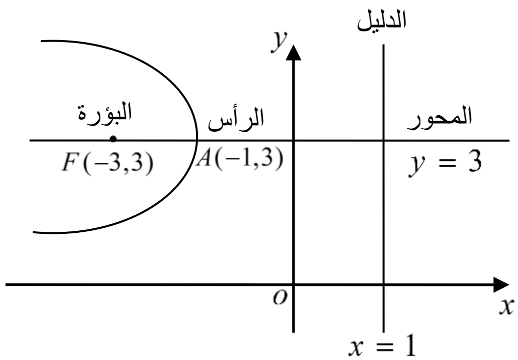
المكافىء $\mathbf{y^2+8x-6y+17=0}$ **مع رسم القطع.** **(7 درجات)**

الحـــــــــــــل

بإكمال المربع يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(y-3)^2=-8(x+1)$$

نلاحظ أن طول الوتر البؤري العمودي 8 وأن $a=-2$ 0رأس القطع المكافئ هي النقطة $(-1,3)$ والبؤرة $(-3,3)$ ومعادلة المحور هي $y=3$ ومعادلة الدليل هي $x=1$ كما موضح في الشكل التالي



السؤال الرابع

أجب عن السؤالين الأتيين

1- عين البؤرة و اوجد معادلة الدليل وطول الوتر البؤرى العمودى للقطع المكافئ

$$3\,y^2 = 8x$$

(10 درجات)

الحـــــــــــــل

معادلة القطع يمكن وضعها على الصورة $y^2 = \frac{8}{3}x$

$\because$ طول الوتر البؤري العمودي يساوي معامل x

$\therefore$ طول الوتر البؤري العمودي $= \frac{8}{3}$

ومنها ينتج أن $4a = \frac{8}{3} \Rightarrow \therefore a = \frac{2}{3}$

البؤرة هي النقطة $(a,0) = (2/3,0)$

الدليل هو المستقيم $x = -a$ أي أن $x = -2/3$

مثال :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة $(0,-4/3)$ ومعادلة دليله هي $y = 4/3$ وأوجد طول الوتر البؤري العمودي

2- عين احدثيات المركز والبؤرتين ومعادلتى الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الناقص

$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ مع رسم القطع.

(10 درجات)

الحـــــــــــــل

بإكمال المربع في x, y تصبح المعادلة على الصورة

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 144 + 144$$

$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

بالقسمة على 144 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

وبالتالي يكون $a^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \therefore a = 6 \quad , \quad b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \therefore b = 4$

ومن العلاقة $b^2 = a^2(1-e^2)$ **نجد أن** $e = \sqrt{5}/3$

ومن المعادلة نحصل على

1- المركز هو النقطة $(6,-4)$

2- البؤرتان هما $(6 \pm ae, -4) = (6 \pm 2\sqrt{5}, -4)$

3- معادلتي الدليلين هما $x = 6 \pm \frac{a}{e} = 6 \pm \frac{18}{\sqrt{5}}$

4- معادلة المحور الأكبر هي $y=-4$ ومعادلة المحور الأصغر هي $x=6$.

5- طول الوتر البؤري العمودي = $\frac{2b^2}{a}=\frac{16}{3}$